

# DÉCOMPOSITION MONOMORPHE DES STRUCTURES RELATIONNELLES ET PROFIL DE CLASSES HÉRÉDITAIRES

DJAMILA OUDRAR AND MAURICE POUZET

Reçu le \*\*\*\*\* ; accepté après révision le ++++++  
Présenté par

RÉSUMÉ. Nous présentons une approche structurelle de résultats de sauts dans le comportement du profil de classes héréditaires de structures finies. Nous partons de la notion suivante due à N.Thiéry et au second auteur. Une *décomposition monomorphe* d'une structure relationnelle  $R$  est une partition de son domaine  $V(R)$  en une famille de parties  $(V_x)_{x \in X}$  telles que les restrictions de  $R$  à deux parties finies  $A$  et  $A'$  de  $V(R)$  sont isomorphes pourvu que les traces  $A \cap V_x$  et  $A' \cap V_x$  aient même cardinalité pour tout  $x \in X$ . Soit  $\mathcal{S}_\mu$  la classe des structures relationnelles de signature  $\mu$  qui n'ont pas de décomposition monomorphe finie. Nous montrons que si une sous classe héréditaire  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{S}_\mu$  est formée de structures relationnelles ordonnées elle contient un ensemble fini  $\mathfrak{A}$  tel que tout élément de  $\mathcal{D}$  abrite un élément de  $\mathfrak{A}$ . En outre, pour chaque  $R \in \mathfrak{A}$ , le profil de l'âge  $\mathcal{A}(R)$  de  $R$  (consistant en les sous-structures finies de  $R$ ) est au moins exponentiel. Il en résulte que, si le profil d'une classe héréditaire de structures ordonnées n'est pas borné par un polynôme, il est au moins exponentiel. Un résultat faisant partie d'une classification obtenue par Balogh, Bollobás et Morris en 2006 pour les graphes ordonnés. *Pour citer cet article : Djamila Oudrar, Maurice Pouzet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.*

## Abstract

**Monomorphic decomposition of relational structures. Application to the profile of hereditary classes.** We present a structural approach of some results about jumps in the behavior of the profile (alias generating function) of hereditary classes of finite structures. We start with the following notion due to N.Thiéry and the second author. A *monomorphic decomposition* of a relational structure  $R$  is a partition of its domain  $V(R)$  into a family of sets  $(V_x)_{x \in X}$  such that the restrictions of  $R$  to two finite subsets  $A$  and  $A'$  of  $V(R)$  are isomorphic provided that the traces  $A \cap V_x$  and  $A' \cap V_x$  have the same size for each  $x \in X$ . Let  $\mathcal{S}_\mu$  be the class of relational structures of signature  $\mu$  which do not have a finite monomorphic decomposition. We show that if a hereditary subclass  $\mathcal{D}$  of  $\mathcal{S}_\mu$  is made of ordered relational structures then it contains a finite subset  $\mathfrak{A}$  such that every member of  $\mathcal{D}$  embeds some member of  $\mathfrak{A}$ . Furthermore, for each  $R \in \mathfrak{A}$  the profile of the age  $\mathcal{A}(R)$  of  $R$  (made of finite substructures of  $R$ ) is at least exponential. We deduce that if the profile of a hereditary class of finite ordered structures is not bounded by a polynomial then it is at least exponential. This result is a part of classification obtained by Balogh, Bollobás and Morris (2006) for ordered graphs. *To cite this article: Djamila Oudrar, Maurice Pouzet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.*

## ABRIDGED ENGLISH VERSION

Let us call *profile* of a class  $\mathcal{C}$  of finite relational structures the integer function  $\varphi_{\mathcal{C}}$  which counts for each non negative integer  $n$  the number of members of  $\mathcal{C}$  on  $n$  elements, isomorphic structures being identified. Numerous papers discuss the behavior of this function when  $\mathcal{C}$  is *hereditary* (that is contains every substructure of a member of  $\mathcal{C}$ ) and is made of graphs (directed or not), of tournaments, of ordered sets, of ordered graphs, of ordered hypergraphs. Furthermore, thanks to a result of Cameron [8], it turns out that the line of study about permutations (see [1]) originating in the Stanley-Wilf conjecture, solved by Marcus and Tardos (2004) [17], falls under the frame of the profile of hereditary classes of relational structures (see [19]). The results show that the profile cannot be arbitrary: there are jumps in its possible growth rate. Typically, its growth is polynomial or faster than every polynomial ([21] for ages, see [23] for a survey) and for several classes of structures, either at least exponential (e.g. for tournaments [4, 6], ordered graphs and hypergraphs [2, 3, 14] and permutations [13]) or at least with the growth of the partition function (e.g. for graphs [5]). For more, see the survey of Klazar [15]. A structural approach of jump results, at least from polynomial growth to faster growth seems to be possible in view of the following result.

**Theorem 0.1.** *If the profile of a hereditary class  $\mathcal{C}$  of finite relational structures (with a finite signature  $\mu$ ) is not bounded by a polynomial then it contains a hereditary class  $\mathfrak{A}$  with this property which is minimal w.r.t. inclusion.*

Indeed, according to Theorem 0.1, the jumps in the profile are given by the growth rate of the profile of these minimal classes. Trivially, these classes are up-directed w.r.t. embeddability, hence, according to an old and well know result of Fraïssé, each one is the *age*  $\mathcal{A}(R)$  of some relational structure  $R$  (the collection of finite structures which are embeddable into  $R$ ). A description of these  $R$  would allow to evaluate the profile of  $\mathcal{A}(R)$ . We partially do it when they are ordered.

Theorem 0.1 appears in a somewhat equivalent form as Theorem 0.1 of [24]. It is not trivial, the main argument relies on a result going back to the thesis of the second author [21], namely Lemma 4.1 p. 23 of [24]. We give below an outline of proof in the case of ordered structures.

Our first result is this:

**Theorem 0.2.** *(a) If an ordered relational structure  $R$  with a finite signature  $\mu$ , has a finite monomorphic decomposition then the profile of  $\mathcal{A}(R)$  is eventually a quasi polynomial, otherwise, it is exponential. More generally, (b) if  $\mathcal{C}$  is a hereditary class of finite ordered relational structures with a finite signature  $\mu$ , then either there is finite bound on the number of monomorphic components of each member of  $\mathcal{C}$  and the profile is eventually a quasi-polynomial, or the profile of  $\mathcal{C}$  is at least exponential.*

The proof of Theorem 0.1 follows from (a). Indeed, let  $\mathcal{C}$  with a non polynomially bounded profile. If  $\mathcal{C}$  has no infinite antichain then the collection of its hereditary subclasses is well-founded. And we are done. If it contains an infinite antichain then it contains an age  $\mathcal{A}(R)$  with infinitely many bounds which contains no infinite antichain (this is standard, see the mention made p.23, line 9 of [24]). Thanks to a result of Higman on words [11], the age of a structure having a finite monomorphic decomposition is hereditary well quasi ordered, hence by the main result of [20] it

has finitely many bounds. Thus  $R$  cannot have a finite decomposition and hence by (a) its profile grows exponentially. Since this age has no infinite antichain, we are back to the first case. The proof of (b) follows from (a) by the same considerations. Let  $\mathcal{S}_\mu$  be the class of all relational structures of signature  $\mu$ ,  $\mu$  finite, without any finite monomorphic decomposition.

**Conjecture 1.** *There is a finite subset  $\mathfrak{A}$  made of incomparable structures of  $\mathcal{S}_\mu$  such that every member of  $\mathcal{S}_\mu$  embeds some member of  $\mathfrak{A}$ .*

If we replace  $\mathcal{S}_\mu$  by the hereditary class  $\mathcal{D}$  made of bichains then  $\mathfrak{A}$  has twenty elements [18]. If  $\mathcal{D}$  is made of tournaments then  $\mathfrak{A}$  has twelve elements [6]. Our second result is this:

**Theorem 0.3.** *(a) Conjecture 1 holds if we replace  $\mathcal{S}_\mu$  by the hereditary class  $\mathcal{D}$  made of ordered relational structures of arity  $\mu$ . (b) If  $\mathcal{D}$  is made of undirected graphs,  $\mathfrak{A}$  has ten elements. (c) If  $\mathcal{D}$  is made of ordered reflexive (or irreflexive) directed graphs,  $\mathfrak{A}$  contains two hundred and thirteen elements such that the linear order is isomorphic to  $\omega$ . In this last item  $\mathfrak{A}$  is made of members whose profile grows exponentially, in fact as fast as the Fibonacci sequence.*

Our tools are Ramsey's theorem and the notion of monomorphic decomposition of a relational structure. It was introduced in [24] in the sequel of R. Fraïssé who invented the notion of monomorphy and C. Frasnay who proved the central result about this notion [10].

## 1. NOTIONS DE BASE ET RÉSULTATS PRINCIPAUX

Notre terminologie est celle de Fraïssé [9]. Une *structure relationnelle* est une paire  $R := (V, (\rho_i)_{i \in I})$  formée d'une famille de relations  $n_i$ -aires  $\rho_i$  sur  $V$ ; l'ensemble  $V$  est le *domaine*, noté  $V(R)$ , la famille  $\mu := (n_i)_{i \in I}$  est la *signature*. Une *structure relationnelle binaire*, simplement *structure binaire*, est formée uniquement de relations binaires. Elle est *ordonnée* si une des ses relations  $\rho_i$ , disons par exemple  $\rho_1$ , est un ordre linéaire. Une structure relationnelle  $R$  s'*abrite* dans une structure relationnelle  $R'$ , fait noté  $R \leq R'$ , si  $R$  est isomorphe à une sous-structure induite de  $R'$ . Une classe  $\mathcal{C}$  de structures est dite *héréditaire* si elle contient toute structure relationnelle qui s'abrite dans un membre de  $\mathcal{C}$ . La classe des structures relationnelles finies de signature  $\mu$  est désignée par  $\Omega_\mu$ . Elle est préordonnée par la relation d'abritement. Si  $\mathcal{B}$  est un sous-ensemble de  $\Omega_\mu$  alors  $Forb(\mathcal{B})$  est la sous-classe des membres de  $\Omega_\mu$  qui n'abritent aucun membre de  $\mathcal{B}$ . Clairement,  $Forb(\mathcal{B})$  est une classe héréditaire. Pour la réciproque, notons qu'une *borne* d'une classe héréditaire  $\mathcal{C}$  de structures relationnelles finies est toute  $R$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{C}$  telle que toute  $R'$  qui s'abrite strictement dans  $R$  appartient à  $\mathcal{C}$ . Clairement, chaque borne de  $\mathcal{C}$  est finie et si  $\mathcal{B}(\mathcal{C})$  désigne la collection des bornes de  $\mathcal{C}$  alors  $\mathcal{C} = Forb(\mathcal{B}(\mathcal{C}))$ . Si  $\mathcal{C}$  est contenue dans  $\Omega_\mu$  et  $\mathcal{A}$  est un ensemble ordonné, nous posons  $\mathcal{C}.\mathcal{A} := \{(R, f) : R \in \mathcal{C}, f : V(R) \rightarrow \mathcal{A}\}$  et  $(R, f) \leq (R', f')$  si il existe un abritement  $h$  de  $R$  dans  $R'$  tel que  $f(x) \leq f'(h(x))$  pour tout  $x \in V(R)$ . Nous rappelons que  $\mathcal{A}$  est *belordonné* (*wqo*) si  $\mathcal{A}$  ne contient ni antichaine infinie ni chaîne infinie strictement décroissante. Nous disons que  $\mathcal{C}$  est *héréditairement belordonnée* si  $\mathcal{C}.\mathcal{A}$  est *belordonnée* pour tout ensemble belordonné  $\mathcal{A}$ . Nous rappelons que si la signature est finie, une sous-classe de  $\Omega_\mu$  qui est héréditaire et héréditairement belordonnée possède un nombre fini de bornes ([20]).

Soit  $R$  une structure relationnelle. Un sous-ensemble  $V'$  de  $V(R)$  est un *bloc monomorphe* de  $R$  si pour tout entier  $k$  et pour toute paire  $A, A'$  de sous-ensembles à  $k$  éléments de  $V(R)$ , les structures induites par  $A$  et  $A'$  sont isomorphes dès que  $A \setminus V' = A' \setminus V'$ . Une *décomposition monomorphe* de  $R$  est une partition  $\mathcal{P}$  de  $V(R)$  en blocs monomorphes. Un bloc monomorphe qui est maximal pour l'inclusion est une *composante monomorphe* de  $R$ . Les composantes monomorphes de  $R$  forment une décomposition monomorphe de  $R$  et toute autre décomposition monomorphe de  $R$  est plus fine qu'elle (Proposition 2.12 of [24]). Si une structure relationnelle infinie a une décomposition monomorphe finie en  $k+1$  blocs, alors trivialement son profil est borné par un polynôme de degré  $k$ . En fait, et c'est le résultat principal de [24], c'est éventuellement un quasi-polynôme dont le degré est le nombre de composantes monomorphes infinies moins 1 (à partir d'un certain rang, c'est une somme  $a_k(n)n^k + \dots + a_0(n)$  dont les coefficients  $a_k(n), \dots, a_0(n)$  sont des fonctions périodiques). La réciproque est fautive, sauf si la structure est ordonnée. C'est une conséquence de notre premier résultat :

**Théorème 1.1.** (a) Si une structure ordonnée  $R$  d'arité finie  $\mu$  a une décomposition monomorphe finie alors le profil de son âge  $A(R)$  est éventuellement un quasi-polynôme, autrement ce profil est au moins exponentiel. Plus généralement, (b) si  $\mathcal{C}$  est une classe héréditaire de structures finies (et l'arité  $\mu$  est finie) alors soit il existe une borne sur le nombre de composantes monomorphes de chaque membre de  $\mathcal{C}$  et le profil est éventuellement un quasi-polynôme, soit le profil est au moins exponentiel.

Le cas d'une classe héréditaire se ramène au cas d'un âge. C'est clair si  $\mathcal{C}$  est une union finie d'âge. Sinon,  $\mathcal{C}$  contient une antichaîne infinie et par suite un âge belordonné ayant une infinité de bornes. Cet âge ne peut être celui d'une structure  $R$  ayant une décomposition monomorphe finie. En effet, grâce à un résultat d'Higman sur les mots [11], l'âge d'une structure ayant une décomposition monomorphe finie est héréditairement belordonné, et donc d'après le résultat de [20] mentionné ci-dessus nous avons :

**Lemme 1.2.** L'âge d'une structure ayant une décomposition monomorphe finie a un nombre fini de bornes.

Ainsi, d'après (a) la croissance du profil de  $A(R)$  et donc celle du profil de  $\mathcal{C}$  est au moins exponentiel. Notons pour le (a) que  $R := (V, \leq, (\rho_i)_{i < m})$  a une décomposition monomorphe finie si et seulement si chaque  $R_i := (V, \leq, \rho_i)$  en a une, ou encore s'il existe une partition de  $V$  en un nombre fini d'intervalles de  $\leq$  tels que les injections partielles qui les préservent sont des isomorphismes locaux de  $R$ .

Soit  $\mathcal{S}_\mu$  la classe de toutes les structures relationnelles de signature  $\mu$  qui n'ont pas de décomposition monomorphe finie.

**Conjecture 1.** Il existe un sous-ensemble fini  $\mathfrak{A}$  formé de structures incomparables de  $\mathcal{S}_\mu$  tel que tout élément de  $\mathcal{S}_\mu$  abrite un élément de  $\mathfrak{A}$ .

Si nous remplaçons  $\mathcal{S}_\mu$  par la classe  $\mathcal{D}$  formée des bichaînes,  $\mathfrak{A}$  possède vingt éléments [18], tandis que si  $\mathcal{D}$  est formée de tournois,  $\mathfrak{A}$  possède douze éléments [6]. Notre second résultat est le suivant :

**Théorème 1.3.** (a) Cette conjecture est vraie si  $\mathcal{S}_\mu$  est remplacée par la classe  $\mathcal{D}$  formée des structures ordonnées d'arité  $\mu$ . (b) Si  $\mathcal{D}$  est formée de graphes (non

143 dirigés),  $\mathfrak{A}$  possède dix éléments. (c) Si  $\mathcal{D}$  est formée des graphes (dirigés) ordonnés  
 144 réflexifs (ou irreflexifs),  $\mathfrak{A}$  possède deux cent treize éléments si l'ordre linéaire est  
 145 isomorphe à  $\omega$ . Dans ce dernier cas  $\mathfrak{A}$  est formé de membres dont le profil a une  
 146 croissance exponentielle, au moins égale à la croissance de la suite de Fibonacci.

147 La conclusion de (c) est contenue dans le théorème 1.1 de Balogh, Bollobás et  
 148 Morris (2006) [3]. Dans le cas (b), les dix éléments  $G_i$ ,  $1 \leq i \leq 10$ , de  $\mathfrak{A}$  ont le même  
 149 ensemble de sommets  $V(G_i) := \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ . Soient  $A := \mathbb{N} \times \{0\}$  et  $B := \mathbb{N} \times \{1\}$ .  
 150 Pour  $i := 1, 2, 3$ , les sous-ensembles  $A$  et  $B$  sont des indépendants et une paire  
 151  $\{(n, 0), (m, 1)\}$  pour  $n, m \in \mathbb{N}$  est une arête de  $G_1$  si  $n = m$ , une arête de  $G_2$  si  
 152  $n \leq m$  et une arête de  $G_3$  si  $n \neq m$ . Ainsi,  $G_1$  est la somme directe d'une infinité  
 153 de copies de  $K_2$  (le graphe complet à deux sommets) et  $G_2$  est le demi-biparti  
 154 complet de Schmerl et Trotter. Pour  $4 \leq i \leq 7$ , l'un des sous-ensembles  $A$ ,  $B$  est  
 155 une clique et l'autre un indépendant. Ainsi, l'ensemble  $E(G_4)$  des arêtes de  $G_4$  est  
 156  $E(G_1) \cup \{\{(n, 0), (m, 0)\}, n \neq m \in \mathbb{N}\}$ ,  $E(G_5) := E(G_2) \cup \{\{(n, 0), (m, 0)\}, n \neq$   
 157  $m \in \mathbb{N}\}$ ,  $E(G_6) := E(G_2) \cup \{\{(n, 1), (m, 1)\}, n \neq m \in \mathbb{N}\}$  et  $E(G_7) := E(G_3) \cup$   
 158  $\{\{(n, 0), (m, 0)\}, n \neq m \in \mathbb{N}\}$ . Les graphes  $G_i$ ,  $i = 8, 9, 10$ , sont tels que les sous-  
 159 ensembles  $A$  et  $B$  sont tous les deux des cliques avec  $E(G_8) \cap E(G_1) = E(G_1)$ ,  
 160  $E(G_9) \cap E(G_2) = E(G_2)$  et  $E(G_{10}) \cap E(G_3) = E(G_3)$ . Le graphe  $G_8$  est le dual de  
 161  $G_3$ , le graphe  $G_7$  le dual de  $G_4$  et le graphe  $G_{10}$  le dual de  $G_1$ .

162 Dans le cas (a), chaque graphe  $G \in \mathfrak{A}$  a un ensemble de sommets égal à  $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$   
 163 ou à  $\{0\} \cup \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ . Si  $\leq$  est isomorphe à  $\omega$ , on obtient deux cent treize graphes  
 164 réflexifs (ou irreflexifs) et si  $\leq$  est isomorphe à  $\omega^*$ , on obtient deux cent treize  
 165 autres graphes (les mêmes que le cas précédent, seul l'ordre  $\leq$  change). Parmi ces  
 166 exemples se trouvent les douze bichaînes  $\mathcal{B} := (V, \leq, \leq')$  de [18] pour lesquelles  $\leq$   
 167 est isomorphe à  $\omega$  ou à  $\omega^*$  (pour les huit autres, l'ordre  $\leq$  est de type  $\alpha + \beta$  avec  
 168  $\alpha, \beta \in \{\omega, \omega^*\}$ ).

## 169 2. OUTILS

170 Nous définissons la partition en composantes monomorphes d'une structure  $R$   
 171 comme suit.

172 Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $V(R)$  et  $F$  un sous-ensemble fini de  $V(R) \setminus$   
 173  $\{x, y\}$ . Nous disons que  $x$  et  $y$  sont  $F$ -équivalents et notons ce fait  $x \simeq_{F,R} y$  si les  
 174 restrictions de  $R$  à  $\{x\} \cup F$  et  $\{y\} \cup F$  sont isomorphes. Pour un entier non négatif  
 175  $k$ , posons  $x \simeq_{k,R} y$  si  $x \simeq_{F,R} y$  pour toute partie  $F$  à  $k$  éléments de  $V(R) \setminus \{x, y\}$ .  
 176 Nous posons  $x \simeq_{\leq k,R} y$  si  $x \simeq_{k',R} y$  pour tout  $k' \leq k$  et  $x \simeq_R y$  si  $x \simeq_{k,R} y$  pour  
 177 tout  $k$ . Ceci définit trois relations d'équivalence sur  $V(R)$ . Nous avons :

178 **Lemme 2.1.** *Les classes d'équivalence de  $\simeq_R$  sont les composantes monomorphes*  
 179 *de  $R$ .*

180 **Lemme 2.2.** *Les relations d'équivalence  $\simeq_{k,R}$  et  $\simeq_{\leq k,R}$  coïncident dès que  $|V(R)| \geq$   
 181  $2k + 1$ . Les relations d'équivalence  $\simeq_{\leq 6,R}$  et  $\simeq_R$  coïncident pour toute structure  
 182 binaire  $R$ . Si  $R$  est un graphe dirigé, resp. un graphe ordonné, nous pouvons rem-  
 183 placer 6 par 3, resp. par 2. Si  $T$  est un tournoi, le nombre de classes d'équivalence  
 184 de  $\simeq_{\leq 3,T}$  est fini si le nombre de classes d'équivalence de  $\simeq_{\leq 2,T}$  est fini. Il existe  
 185 un entier  $i(m)$  tel que pour une structure ordonnée d'arité au plus  $m$  les relations  
 186 d'équivalence  $\simeq_{\leq i(m),R}$  et  $\simeq_R$  coïncident.*

La première affirmation s'ensuit d'un résultat de Gottlieb et Kantor sur les matrices d'incidence. Le cas des structures binaires découle du résultat de reconstruction dû à Lopez [16]. Le cas des graphes dirigés a été obtenu indépendamment par Boudabbous [7]. Le cas des structures ordonnées découle d'un résultat dû à Ille [12]. En utilisant le résultat de [22] on peut montrer qu'il n'existe aucun seuil pour les relations ternaires.

Dans le cas d'une structure binaire ordonnée  $R := (E, \leq, (\rho_i)_{i \in I})$  la relation d'équivalence  $\simeq_R$  a les propriétés suivantes :

**Lemme 2.3.** *Toute classe d'équivalence ayant au moins trois éléments est un intervalle de  $R$  (au sens de Fraïssé) donc un intervalle de  $\leq$ . Réciproquement, un intervalle de  $R$  n'est pas nécessairement, une classe de 1-équivalence, mais tout intervalle qui est contenu dans une classe de 1-équivalence est contenu dans une classe d'équivalence.*

**Lemme 2.4.** *Si deux classes d'équivalence sont telles que leur réunion est un intervalle de  $\leq$  alors elles ne font pas parties d'une même classe de 1-équivalence.*

Dans le cas particulier des graphes ordonnés dirigés réflexifs (ou irréflexifs), le résultat principal qui permet de déterminer les éléments de  $\mathfrak{A}$  est le lemme suivant :

**Lemme 2.5.** *Si un graphe ordonné dirigé  $G := (V, \leq, \rho)$  possède une infinité de classes d'équivalence alors ou bien  $V$  contient un sous-ensemble infini  $A$  tel que deux sommets distincts de  $A$  sont 0-équivalents mais non 1-équivalents, ou bien  $V$  contient deux sous-ensembles infinis disjoints  $A_1$  et  $A_2$  tels que deux sommets distincts de  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ , sont 1-équivalents mais non équivalents et pour tout  $x, y \in A_i$ ,  $i \neq j \in \{1, 2\}$ , la trace de l'intervalle  $I_{\leq}(x, y)$  sur  $A_j$  est non vide .*

Si une structure  $R$  possède une infinité de classes de  $k$ -équivalence alors il existe une famille de fonctions  $f : \mathbb{N} \rightarrow V(R)$ ,  $g_i : [\mathbb{N}]^2 \rightarrow V(R)$  pour  $i < k - 1$  telles que pour tout  $n < n' \in \mathbb{N}$ ,  $f(n)$  et  $f(n')$  ne sont pas  $\{g_i(n, n') : i < k - 1\}$ -équivalents. La restriction de  $R$  à la réunion des images de cette collection de fonctions a une infinité de classes d'équivalence. Le théorème de Ramsey permet de trouver un sous-ensemble infini  $X \subseteq \mathbb{N}$  sur lequel les fonctions de cette collection sont "invariantes" pour  $R$  (la notion d'invariance est expliquée dans 2.2 de [6]). Supposons  $X = \mathbb{N}$ , soit  $F$  l'application de  $\mathbb{N} \times \{0, \dots, k\}$  dans  $V(R)$  définie par  $F(n, 0) := f(n)$  et  $F(n, i + 1) := g_i(n, n + 1)$ . Il s'avère que si  $R$  est ordonnée, la restriction de  $R$  à l'image de  $F$  a une infinité de classes d'équivalence et en outre son profil est au moins exponentiel. De ceci on déduit la preuve du Théorème 1.1 et le (a) du Théorème 1.3. La même approche avec plus de soin et les lemmes ci-dessus conduisent aux (b) et (c) de ce résultat.

## RÉFÉRENCES

- [1] M.H. Albert and M.D. Atkinson, Simple permutations and pattern restricted permutations. *Discrete Mathematics*, **300** (2005) 1–15.
- [2] J. Balogh, B. Bollobás and R. Morris, Hereditary properties of partitions, ordered graphs and ordered hypergraphs. *European Journal of Combinatorics*, **8**, (2006) 1263–1281.
- [3] J. Balogh, B. Bollobás and R. Morris, Hereditary properties of ordered graphs, in Topics in discrete mathematics, 179–213, Algorithms Combin., 26, Springer, Berlin, 2006.
- [4] J. Balogh, B. Bollobás and R. Morris, Hereditary properties of tournaments. *Electron. J. Combin.* **14** (2007), no. 1, Research Paper 60, 25 pp.

- [5] J. Balogh, B. Bollobás, M. Saks and V. T. Sós, The unlabelled speed of a hereditary graph property. *J. Combinatorial Theory*, series B **99** (2009) 9–19.
- [6] Y. Boudabous and M. Pouzet, The morphology of infinite tournaments; application to the growth of their profile. *European Journal of Combinatorics*. **31** (2010) 461–481.
- [7] Y. Boudabous, Personnel communication, August 2013.
- [8] P. J. Cameron, Homogeneous permutations. Permutation patterns (Otago, 2003). *Electron. J. Combin.* **9** (2002/03), no. 2, Research paper 2, 9 pp.
- [9] R. Fraïssé, *Theory of relations*. Second edition, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2000.
- [10] C. Frasnay, *Quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes*. Thèse. Paris. Annales Institut Fourier Grenoble **15** (1965), pp. 415–524.
- [11] G. Higman, Ordering by divisibility in abstract algebras. *Proc. London Math. Soc.*, (3) **2** (1952) 326–336.
- [12] P. Ille, The reconstruction of multirelations, at least one component of which is a chain. *J. Combin. Theory*, Ser. A **61** (1992), no. 2, 279–291.
- [13] T. Kaiser, M. Klazar, On growth rates of closed permutation classes. Permutation patterns (Otago, 2003). *Electron. J. Combin.* **9** (2002/03), no. 2, Research paper 10, 20 pp.
- [14] M. Klazar, On growth rates of permutations, set partitions, ordered graphs and other objects. *Electron. J. Combin.* **15** (2008), no. 1, Research Paper 75, 22 pp.
- [15] M. Klazar, Overview of general results in combinatorial enumeration, in *Permutation patterns*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 376, (2010), 3–40, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [16] G. Lopez, L’indéformabilité des relations et multirelations binaires. *Z. Math. Logik Grundlag. Math.* **24** (1978), no. 4, 303–317.
- [17] A. Marcus, G. Tardös, Excluded permutation matrices and the Stanley-Wilf conjecture, *J. Combin. Theory*, Ser. A **107** (2004), 153–160.
- [18] T. Monteil and M. Pouzet. From the complexity of infinite permutations to the profile of bichains. In *ROGICS’08 : International Conference on Relations, Orders and Graphs : Interaction with Computer Science*, pages 1–6, 2008.
- [19] D. Oudrar, M. Pouzet, Profile and hereditary classes of relational structures, ISOR’11, International Symposium on Operational Research, Algiers, Algeria, May 30–June 2, 2011, H.Ait Haddadene, I.Bouchemakh, M.Boudar, S.Bouroubi (Eds) LAID3.
- [20] M. Pouzet, Un belordre d’abritement et ses rapports avec les bornes d’une multirelation. *Comptes rendus Acad. Sci. Paris*, Sér A **274** (1972), pp. 1677–1680.
- [21] M. Pouzet, *Sur la théorie des relations*, Thèse d’État, Université Claude-Bernard, Lyon 1, 1978.
- [22] M. Pouzet, Relations non restructurables par leurs restrictions, *J. Combin. Theory* Ser. B **26**(1979), no. 1, 22–34.
- [23] M. Pouzet, The profile of relations, *Glob. J. Pure Applied Math.* **2** (2006) 237–272 (Proceedings of the 14<sup>th</sup> symposium of the Tunisian Mathematical Society, held in Hammamet, March 20–23, 2006).
- [24] M. Pouzet and N. M. Thiéry. Some relational structures with polynomial growth and their associated algebras I : Quasi-polynomiality of the profile. *Electron. J. Combin.*, **20**(2) : Paper 1, 35, 2013.

FACULTY OF MATHEMATICS, USTHB, ALGIERS, ALGERIA  
E-mail address: dabchiche@usthb.dz; djoudrar@gmail.com

ICJ, MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ CLAUDE-BERNARD LYON1, 43 BD. 11 NOVEMBRE 1918  
F69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE AND UNIVERSITY OF CALGARY, DEPARTMENT OF MATHE-  
MATICS AND STATISTICS, CALGARY, ALBERTA, CANADA T2N 1N4  
E-mail address: pouzet@univ-lyon1.fr